

# Matrix Algebra

$(M \times N)$  Matrix:  $M \dots$  Zeilenzahl  
 $N \dots$  Spaltenzahl

$(2 \times 3):$  
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$
  $a_{ij}$ : Element in  
der  $j$ -ten Spalte  
von Zeile  $i$

Transponieren:

$$\begin{matrix} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ 3 \times 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix} \\ 2 \times 3 \end{matrix}$$

es gilt:  $(A^T)^T = A$

und für symmetrische Matrizen:  $A^T = A$

Multiplikation:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} (2 \times \underline{2}) & (\underline{2} \times 1) & (2 \times 1) \\ \underbrace{\hspace{1cm}} & & \\ \text{muss gleich sein} & & \end{matrix}$$

Determinante: Bei  $(2 \times 2)$ -Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$(2 \times 2)$

$$\det(A) = D(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Inversion: Bei  $(2 \times 2)$ -Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

lineares Gleichungssystem:

→ Aufgabe 12 &

$$a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b_1$$

$$a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = b_2$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

# Lösung über die Cramer - Regel

Vss.: • quadratische Matrix

- Inverse existiert  $\Leftrightarrow$  reguläre Matrix
- $\Leftrightarrow$  eindeutige Lösung

Ansatz 1:

$$x = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \cdot \det \begin{pmatrix} \boxed{b_1} & a_{12} \\ \boxed{b_2} & a_{22} \end{pmatrix}$$

↑  
Einsetzen  
des  $b$ -  
Vektors in  
Spalte 1

$$y = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{b_1} \\ a_{21} & \boxed{b_2} \end{pmatrix}$$

↑  
jetzt in die 2. Spalte

$$x = \frac{b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}$$

$$y = \frac{a_{11} \cdot b_2 - a_{21} \cdot b_1}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}$$

2. Ansatz:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot b$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} \cdot b_1 - a_{12} \cdot b_2 \\ -a_{21} \cdot b_1 + a_{11} \cdot b_2 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 15)

$$(a) \quad 3 \cdot x + 8 \cdot y = a$$

$$\text{und (b)} \quad x - 5 \cdot y = b$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Gesucht:  $da$  und  $db$

Gegeben:  $dx$  und  $dy$

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} da \\ db \end{pmatrix}$$

Umstellen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} da \\ db \end{pmatrix}$$

Regel:  $A^{-1} \cdot A = E$   
 $E_{(2 \times 2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  Einheitsmatrix

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} da \\ db \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} da \\ db \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} da \\ db \end{pmatrix} = -23 \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -23 \cdot dx \\ -23 \cdot dy \end{pmatrix}$$

$$da = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}$$

~~$$\cdot \det \begin{pmatrix} -23 \cdot dx & -8 \\ -23 \cdot dy & 3 \end{pmatrix}$$~~

$$\cdot \det \begin{pmatrix} -23 dx & -8 \\ -23 dy & 3 \end{pmatrix}$$

$$da = \frac{-23 \cdot dx \cdot 3 - (-23 dy) \cdot (-8)}{-23}$$

$$(a) \quad (dx^*, dy^*) = (-1, 1)$$

$$da = \frac{-23 \cdot (-1) \cdot 3 - (-23 \cdot 1) \cdot (-8)}{-23}$$

$$\Rightarrow da = 5$$

$$(b) \quad da = \frac{-23 \cdot (-1) \cdot 3 - (-23 \cdot 0) \cdot (-8)}{-23}$$

$$\Rightarrow da = -3$$

$$db = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}} \cdot \det \begin{pmatrix} -5 & -23dx \\ -1 & -23dy \end{pmatrix}$$

$$\cancel{db} = \frac{-5 \cdot (-23 \cdot dy) - (-1) \cdot (-23 \cdot dx)}{-23}$$

$$(a) \quad db = \frac{-5 \cdot (-23 \cdot 1) - (-1) \cdot (-23 \cdot (-1))}{-23}$$

$$\Rightarrow db = -6$$

$$(b) \quad db = \frac{-5 \cdot (-23 \cdot 0) - (-1) \cdot (-23 \cdot \overset{(-1)}{\downarrow} \cancel{1})}{-23} = -1$$